Title	安島直円「円内容累円術」について(数学史の研究)
Author(s)	藤井, 康生
Citation	数理解析研究所講究録 (2007), 1546: 181-200
Issue Date	2007-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/80771
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 1546 巻 2007 年 181-200

安島直円「円内容累円術」について

藤井康生 (Yasuo Fujii)

1 はじめに

安島直円は「円内容累円術」(左右対称の場合天明 4 年 (1784), 一般の場合寛政 3 年 (1791)) の中で内外の円があり, その間に環状に甲円, 乙円, 丙円, 丁円 $\cdots$ を容れる. 外, 内, 甲円の直径を与えて乙円, 丙円, 丁円 $\cdots$ の直径を求める問題の解を述べている. 安島の出した結論は、累円の個数を角数とする正多角形の二距斜冪率を求める. するとこの二距斜冪率から累円の直径を求める事ができると述べている. この問題は松永良弼「算法全経 (廉術)」や有馬頼徸『拾璣算法』においてすでに取り上げられており累円の直径を求める漸化式も載せられている. 安島直円はこれらの結果を踏まえて,「廉術変換」でその元となる, 外, 内, 甲, 乙円の直径の間の関係を一般に述べている.「円内容累円術」において安島直円が述べようとしたことは東 $= \frac{4\,内\times外}{(外-甲)(内+甲)}$ が二距斜冪率に等しいことである. 従来安島直円の「円内容累円術」は加藤平左エ門氏の『和算ノ研究　雑論 II』に述べられているように, 東の高次方程式を求め, これが二距斜冪率の式と同じになることを述べたものであるとされていたと思われる. 安島直円は東が二距斜冪率になることを, 証明しようとして「円内容累円術」において東を 3 円の場合より順に計算していったことは確かであるが, 安島直円が述べている結論は二距斜冪率は級数によって求められることがわかっているので, 先に触れた漸化式によらず, 二距斜冪率によって累円の直径が求めらることを述べている. 累距斜を級数を用いて表すことは, 松永良弼「方円算法」から始まっている. これは級数の研究が松永良弼から有馬頼徸, 安島直円へと発展していったことが窺われる興味深いものである. 本稿では安島直円「円内容累円術」「後編」について, 本文の順序にしたがって概説していく.

2 起源

仮如外径云内径云甲径云欲求乙丙丁及其次々円径者依廉術求得乙率而丙率而丁率及次々各率為法以甲径為通実以所求法除之得其円径

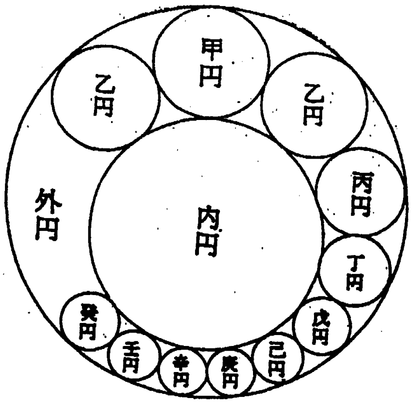
外円の内に内円があり, 甲円, 乙円, 丙円, 丁円 $\cdots$ を外円, 内円に接し, 互いに接するように入れる.

外円, 内円, 甲円の直径を与えて, 乙円, 丙円, 丁円　$\cdots$　の直径を求めよ.

廉術によって乙率, 丙率, 丁率　$\cdots$　を求めて法とする. 甲円の直径を通実として,

$\frac{通実}{乙率}$ が乙円の直径である. 丙円, 丁円　$\cdots$　の直径も同様にして求められる.

廉術より



寄位 $=$ (外 $-$ 甲)(内 $+$ 甲)　増率 $= \dfrac{2(\text{外}-\text{内})\,\text{甲}}{\text{寄位}}$　因法 $=$ 東 $-\,2$

乙率 $=$ 増率 $+$ 因法　東 $= \dfrac{4\,\text{内}\times\text{外}}{\text{寄位}}$　増率 $=$ 乙率 $-$ 因法

増率 $= 2$ 乙率 $-$ 東 $+\,2$

各率を求める

甲率 $= 1$

丙率 $=$ 乙率 $\times$ 因法 $+$ 増率 $-$ 甲率 $=$ 乙率 (東 $-\,2$) $+$ 増率 $-\,1 =$ 乙率 $\times$ 東 $-$ 因法 $-\,1$

丙率 $=$ 乙率 $\times$ 東 $-$ 東 $+\,1 =$ 東 $\times$ 冬 $+\,1$　冬 $=$ 乙率 $-\,1$

丁率 $=$ 丙率 $\times$ 因法 $+$ 増率 $-$ 乙率 $=$ (東 $\times$ 冬 $+\,1$)(東 $-\,2$) $+$ 増率 $-$ 乙率

$=$ 東^2 $\times$ 冬 $+$ 東 $-\,2$ 東 $\times$ 冬 $-\,2\,+$ 増率 $-$ 乙率

$=$ 東^2 $\times$ 冬 $-\,2$ 東 $\times$ 冬 $+$ 乙率

戊率 $=$ 丁率 $\times$ 因法 $+$ 増率 $-$ 丙率

$=$ (東^2 $\times$ 冬 $-\,2$ 東 $\times$ 冬 $+$ 乙率)(東 $-\,2$) $+\,2$ 乙率 $-$ 東 $+\,2\,-$ 東 $\times$ 冬 $-\,1$

$=$ 東^3 $\times$ 冬 $-\,4$ 東^2 $\times$ 冬 $+\,3$ 東 $\times$ 冬 $+$ 東 $\times$ 乙率 $-$ 東 $+\,1$

$=$ 東^3 $\times$ 冬 $-\,4$ 東^2 $\times$ 冬 $+\,4$ 東 $\times$ 冬 $+\,1$

己率 $=$ 戊率 $\times$ 因法 $+$ 増率 $-$ 丁率

$=$ (東^3 $\times$ 冬 $-\,4$ 東^3 $\times$ 冬 $+\,4$ 東 $\times$ 冬 $+\,1$)(東 $-\,2$) $+\,2$ 乙率 $-$ 東 $+\,2\,-$ 東^2 $\times$ 冬 $+\,2$ 東 $\times$ 冬 $-$ 乙率

$=$ 東^4 $\times$ 冬 $-\,6$ 東^3 $\times$ 冬 $+\,11$ 東^2 $\times$ 冬 $-\,6$ 東 $\times$ 冬 $+$ 乙率

庚率 $=$ 己率 $\times$ 因法 $+$ 増率 $-$ 戊率

$=$ (東^4 $\times$ 冬 $-\,6$ 東^3 $\times$ 冬 $+\,11$ 東^2 $\times$ 冬 $-\,6$ 東 $\times$ 冬 $+$ 乙率)(東 $-\,2$) $+$ (2 乙率 $-$ 東 $+\,2$)

$-$(東^2 $\times$ 冬 $-\,4$ 東^2 $\times$ 冬 $+\,4$ 東 $\times$ 冬 $+\,1$)

$=$ 東^5 $\times$ 冬 $-\,8$ 東^4 $\times$ 冬 $+\,22$ 東^3 $\times$ 冬 $-\,24$ 東^2 $\times$ 冬 $+\,8$ 東 $\times$ 冬 $+\,1\,+$ 東 (乙率 $-\,1$)

$=$ 東^5 $\times$ 冬 $-\,8$ 東^4 $\times$ 冬 $+\,22$ 東^3 $\times$ 冬 $-\,24$ 東^2 $\times$ 冬 $+\,9$ 東 $\times$ 冬 $+\,1$

辛率 $=$ 庚率 $\times$ 因法 $+$ 増率 $-$ 己率

$=$ (東^5 $\times$ 冬 $-\,8$ 東^4 $\times$ 冬 $+\,22$ 東^3 $\times$ 冬 $-\,24$ 東^2 $\times$ 冬 $+\,9$ 東 $\times$ 冬 $+\,1$)(東 $-\,2$) $+$ (2 乙率 $-$ 東 $+\,2$)

$-(\text{東}^4 \times \text{冬} - 6\text{東}^3 \times \text{冬} + 11\text{東}^2 \times \text{冬} - 6\text{東} \times \text{冬} + \text{乙率})$

$= \text{東}^6 \times \text{冬} - 10\text{東}^5 \times \text{冬} + 37\text{東}^4 \times \text{冬} - 62\text{東}^3 \times \text{冬} + 46\text{東}^2 \times \text{冬} - 12\text{東} \times \text{冬} + \text{乙率}$

$\text{壬率} = \text{辛率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{庚率}$

$= (\text{東}^6 \times \text{冬} - 10\text{東}^5 \times \text{冬} + 37\text{東}^4 \times \text{冬} - 62\text{東}^3 \times \text{冬} + 46\text{東}^2 \times \text{冬} - 12\text{東} \times \text{冬} + \text{乙率})(\text{東} - 2)$

$+(2\text{乙率} - \text{東} + 2) - (\text{東}^5 \times \text{冬} - 8\text{東}^4 \times \text{冬} + 22\text{東}^3 \times \text{冬} - 24\text{東}^2 \times \text{冬} + 9\text{東} \times \text{冬} + 1)$

$= \text{東}^7 \times \text{冬} - 12\text{東}^6 \times \text{冬} + 56\text{東}^5 \times \text{冬} - 128\text{東}^4 \times \text{冬} + 148\text{東}^3 \times \text{冬} - 80\text{東}^2 \times \text{冬}$

$+16\text{東} \times \text{冬} + 1$

$\text{癸率} = \text{壬率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{辛率}$

$= \text{東}^8 \times \text{冬} - 14\text{東}^7 \times \text{冬} + 79\text{東}^6 \times \text{冬} - 230\text{東}^5 \times \text{冬} + 367\text{東}^4 \times \text{冬}$

$-314\text{東}^3 \times \text{冬} + 130\text{東}^2 \times \text{冬} - 20\text{東} \times \text{冬} + \text{乙率}$

個別の場合について

3円のとき，丙率＝乙率

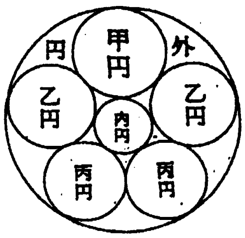
$\text{東} \times \text{冬} + \text{乙率} = \text{東} \times \text{冬} - \text{冬} = \text{冬}(\text{東} - 1) = 0$

$\text{東} - 1 = 0$

4円のとき，丁率＝乙率

$\text{東}^2 \times \text{冬} - 2\text{東} \times \text{冬} = \text{東} \times \text{冬}(\text{東} - 2) = 0$

$\text{東} - 2 = 0$



5円のとき，丁率＝丙率

$\text{東}^2 \times \text{冬} - 2\text{東} \times \text{冬} + \text{乙率} = \text{東} \times \text{冬} + 1$

$\text{冬}(\text{東}^2 - 3\text{東} + 1) = 0 \quad \text{東}^2 - 3\text{東} + 1 = 0$

6円のとき，戊率＝丙率

$\text{東}^3 \times \text{冬} - 4\text{東}^2 \times \text{冬} + 3\text{東} \times \text{冬} + \text{東} \times \text{乙率} - \text{東} + 1 = \text{東} \times \text{冬} + 1$

$\text{東} \times \text{冬}(\text{東}^2 - 4\text{東} + 3) = 0$

$\text{東}^2 - 4\text{東} + 3 = 0$

7円のとき，戊率＝丁率

$東^3 \times 冬 - 4\,東^2 \times 冬 + 3\,東 \times 冬 + 東 \times 乙率 - 東 + 1$

$= 東^2 \times 冬 - 2\,東 \times 冬 + 乙率$

$冬 (東^3 - 5\,東^2 + 6\,東 - 1 = 0$

$東^3 - 5\,東^2 + 6\,東 - 1 = 0$

８円のとき，己率＝丁率

$東^4 \times 冬 - 6\,東^3 \times 冬 + 11\,東^2 \times 冬 - 6\,東 \times 冬 + 乙率$

$= 東^2 \times 冬 - 3\,東 \times 冬 + 乙率$

$東 \times 冬 (東^3 - 6\,東^2 + 10\,東 - 4) = 0$

$東^3 - 6\,東^2 + 10\,東 - 4 = 0$

９円のとき，己率＝戊率

$東^4 \times 冬 - 6\,東^3 \times 冬 + 11\,東^2 \times 冬 - 6\,東 \times 冬 + 乙率$

$= 東^3 \times 冬 - 4\,東^2 \times 冬 + 4\,東 \times 冬 + 1$

$東^4 - 7\,東^3 + 15\,東^2 - 10\,東 + 1 = 0$

１０円のとき，庚率＝戊率

$東^5 \times 冬 - 8\,東^4 \times 冬 + 22\,東^3 \times 冬 - 24\,東^2 \times 冬 + 9\,東 \times 冬 + 1$

$= 東^3 \times 冬 - 4\,東^2 \times 冬 + 4\,東 \times 冬 + 1$

$東^4 - 8\,東^3 + 21\,東^2 - 20\,東 + 5 = 0$

１１円のとき，庚率＝己率

$東^5 \times 冬 - 8\,東^4 \times 冬 + 22\,東^3 \times 冬 - 24\,東^2 \times 冬 + 9\,東 \times 冬 + 1$

$= 東^4 \times 冬 - 6\,東^3 \times 冬 + 11\,東^2 \times 冬 - 6\,東 \times 冬 + 乙率$

$東^5 - 9\,東^4 + 28\,東^3 - 35\,東^2 + 15\,東 - 1 = 0$

１２円のとき，辛率＝己率

$東^6 \times 冬 - 10\,東^5 \times 冬 + 37\,東^4 \times 冬 - 62\,東^3 \times 冬 + 46\,東^2 \times 冬 - 12\,東 \times 冬 + 乙率$

$= 東^4 \times 冬 - 6\,東^3 \times 冬 + 11\,東^2 \times 冬 - 6\,東 \times 冬 + 乙率$

$東^5 - 10\,東^4 + 36\,東^3 - 56\,東^2 + 35\,東 - 6 = 0$

１３円のとき，辛率＝庚率

$\text{東}^6 \times \text{冬} - 10\,\text{東}^5 \times \text{冬} + 37\,\text{東}^4 \times \text{冬} - 62\,\text{東}^3 \times \text{冬} + 46\,\text{東}^2 \times \text{冬} - 12\,\text{東} \times \text{冬} + \text{乙率}$

$= \text{東}^5 \times \text{冬} - 8\,\text{東}^4 \times \text{冬} + 22\,\text{東}^3 \times \text{冬} - 24\,\text{東}^2 \times \text{冬} + 9\,\text{東} \times \text{冬} + 1$

$\text{東}^6 - 11\,\text{東}^5 + 45\,\text{東}^4 - 84\,\text{東}^3 + 70\,\text{東}^2 - 21\,\text{東} + 1 = 0$

１４円のとき，壬率＝庚率

$\text{東}^7 \times \text{冬} - 12\,\text{東}^6 \times \text{冬} + 56\,\text{東}^5 \times \text{冬} - 128\,\text{東}^4 \times \text{冬} + 148\,\text{東}^3 \times \text{冬} - 80\,\text{東}^2 \times \text{冬} + 16\,\text{東} \times \text{冬} + 1$

$= \text{東}^5 \times \text{冬} - 8\,\text{東}^4 \times \text{冬} + 22\,\text{東}^3 \times \text{冬} - 24\,\text{東}^2 \times \text{冬} + 9\,\text{東} \times \text{冬} + 1$

$\text{東}^6 - 12\,\text{東}^5 + 55\,\text{東}^4 - 120\,\text{東}^3 + 126\,\text{東}^2 - 56\,\text{東} + 7 = 0$

１５円のとき，壬率＝辛率

$\text{東}^7 \times \text{冬} - 12\,\text{東}^6 \times \text{冬} + 56\,\text{東}^5 \times \text{冬} - 128\,\text{東}^4 \times \text{冬} + 148\,\text{東}^3 \times \text{冬} - 80\,\text{東}^2 \times \text{冬} + 16\,\text{東} \times \text{冬} + 1$

$= \text{東}^6 \times \text{冬} - 10\,\text{東}^5 \times \text{冬} + 37\,\text{東}^4 \times \text{冬} - 62\,\text{東}^3 \times \text{冬} + 46\,\text{東}^2 \times \text{冬} - 12\,\text{東} \times \text{冬} + \text{乙率}$

$\text{東}^7 - 12\,\text{東}^5 + 55\,\text{東}^4 - 120\,\text{東}^3 + 126\,\text{東}^2 - 56\,\text{東} + 7 = 0$

１６円のとき，癸率＝辛率

$\text{東}^8 \times \text{冬} - 14\,\text{東}^7 \times \text{冬} + 79\,\text{東}^6 \times \text{冬} - 230\,\text{東}^3 \times \text{冬} + 367\,\text{東}^4 \times \text{冬} - 314\,\text{東}^3 \times \text{冬} + 130\,\text{東}^2 \times \text{冬}$

$-20\,\text{東} \times \text{冬} + \text{乙率}$

$= \text{東}^6 \times \text{冬} - 10\,\text{東}^5 \times \text{冬} + 37\,\text{東}^4 \times \text{冬} - 62\,\text{東}^3 \times \text{冬} + 46\,\text{東}^2 \times \text{冬} - 12\,\text{東} \times \text{冬} + \text{乙率}$

$\text{東}^9 - 14\,\text{東}^6 + 78\,\text{東}^5 - 220\,\text{東}^4 + 330\,\text{東}^3 - 252\,\text{東}^2 + 84\,\text{東} - 8$

東について

６円　$(\text{東}^2 - 4\,\text{東} + 3) \div (\text{東} - 1) = \text{東} - 3$

８円　$(\text{東}^3 - 6\,\text{東}^2 + 10\,\text{東} - 4) \div (\text{東} - 2) = \text{東}^2 - 4\,\text{東} - 2$

１０円　$(\text{東}^4 - 8\,\text{東}^3 + 21\,\text{東}^2 - 20\,\text{東} + 5) \div (\text{東}^2 - 3\,\text{東} + 1) = \text{東}^2 - 5\,\text{東} + 5$

１２円　$(\text{東}^5 - 10\,\text{東}^4 + 36\,\text{東}^3 - 56\,\text{東}^2 + 35\,\text{東} - 6) \div (\text{東}^2 - 4\,\text{東} + 3) = \text{東}^3 - 6\,\text{東}^2 + 9\,\text{東} - 2$

１４円　$(\text{東}^6 - 12\,\text{東}^5 + 55\,\text{東}^4 - 120\,\text{東}^3 + 126\,\text{東}^2 - 56\,\text{東} + 7) \div (\text{東}^3 - 5\,\text{東}^2 + 6\,\text{東} - 1)$

$= \text{東}^3 - 7\,\text{東}^2 + 14\,\text{東} - 7$

１６円　$(\text{東}^7 - 14\,\text{東}^6 + 78\,\text{東}^5 - 220\,\text{東}^4 + 330\,\text{東}^3 - 252\,\text{東}^2 + 84\,\text{東} - 8) \div (\text{東}^3 - 6\,\text{東}^2 + 10\,\text{東} - 4)$

$= \text{東}^4 - 8\,\text{東}^3 + 20\,\text{東}^2 - 16\,\text{東} + 2$

	8級	7級	6級	5級	4級	3級	2級	1級
3円							-1	1
4円							-2	1
5円						1	-3	1
6円						3	-4	1
7円					-1	6	-5	1
8円					-4	10	-6	1
9円				1	-10	15	-7	1
10円				5	-20	21	-8	1
11円			-1	15	-35	28	-9	1
12円			-6	35	-56	36	-10	1
13円		1	-27	70	-84	45	-11	1
14円		7	-56	126	-120	55	-12	1
15円	-1	28	-126	210	-165	66	-13	1
16円	-8	84	-252	330	-220	78	-14	1

表 1: 東の係数

	5級	4級	3級	2級	1級
4円				-2	1
6円				-3	1
8円			2	-4	1
10円			5	-5	1
12円		-2	9	-6	1
14円		-7	14	-7	1
16円	2	-16	20	-8	1

表 2: 偶数個の場合

奇数個の場合につて

$$\text{原数} = (\text{円数}) - 2 = n - 2 \qquad \text{一差} = (\text{原数}) - 1 = n - 3$$

$$\text{二差} = (\text{一差}) - 1 = n - 4 \qquad \text{三差} = (\text{二差}) - 1 = n - 5$$

1級数　1

2級数　原数 $= n - 1$

3級数　$\dfrac{(\text{一差})(\text{二差})}{2} = \dfrac{(n-3)(n-4)}{2}$

4級数　$\dfrac{(\text{3級数})(\text{三差})(\text{四差})}{3(\text{一差})} = \dfrac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2 \times 3}$

	8級	7級	6級	5級	4級	3級	2級	1級
3円							-1	1
5円						1	-3	1
7円					-1	6	−5	1
9円				1	-10	15	-7	1
11円			-1	15	-35	28	-9	1
13円		1	-21	70	-84	45	-11	1
15円	-1	28	-126	210	-165	66	-13	1

表 3: 奇数個の場合

5級数 $\frac{(4\text{級数})(\text{五差})(\text{六差})}{4(\text{二差})} = \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{2\times3\times4}$

6級数 $\frac{(5\text{級数})(\text{七差})(\text{八差})}{5(\text{三差})} = \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{2\times3\times4\times5}$

偶数個の場合につて

$\text{原数} = \frac{\text{円数}}{2} = \frac{n}{2}$ 　$\text{一差} = (\text{原数}) - 3 = \frac{n}{2} - 3$

1級数 1

2級数 $\text{原数} = \frac{n}{2}$

3級数 $\frac{(2\text{級数})(\text{一差})}{2} = \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-3)}{2}$

4級数 $\frac{(3\text{級数})(\text{二差})(\text{三差})}{3(\text{一差})} = \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-4)(\frac{n}{2}-5)}{2\times3}$

5級数 $\frac{(4\text{級数})(\text{四差})(\text{五差})}{4(\text{二差})} = \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-5)(\frac{n}{2}-6)(\frac{n}{2}-7)}{2\times3\times4}$

6級数 $\frac{(5\text{級数})(\text{六差})(\text{五差})}{5(\text{三差})} = \frac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-6)(\frac{n}{2}-7)(\frac{n}{2}-8)(\frac{n}{2}-9)}{2\times3\times4\times5}$

直求径式

9円 　$\text{東}^4 - 7\,\text{東}^3 + 15\,\text{東}^2 - 10\,\text{東} + 1 = 0$

3円 　$\text{東} - 1 = 0$

(9円) ÷ (3円) 9円 　$\text{東}^3 - 6\,\text{東}^2 + 9\,\text{東} - 1$

12円 　$\text{東}^3 - 6\,\text{東}^2 + 9\,\text{東} - 2\,\text{東} - 2$

(12円) ÷ (4円) 　$\text{東}^2 - 4 + 1$

１５円　$東^7-13東^6+66東^5-165東^4+210東^3-126東^2+28東-1$

(１５円)÷(３円)　$東^6-12東^5+54東^4-111東^3+99東^2-27東+1$

(１５円)÷(５円)　$東^4-9東^3+26東^2-24東+1$

東を得た後

$$(外-甲)(内+甲)東=4内\times外$$

$$内\times外\times東-内\times甲\times東+外\times甲\times東-甲^2東=4内\times外$$

$$内\times外-内\times甲+外\times甲-甲^2-\frac{4内\times外}{東}=0$$

外，内より甲を求める式

$$内\times外-\frac{4内\times外}{東}+(外-内)甲-甲^2=0$$

外，甲より内を求める式

$$外\times甲-甲^2+(外-甲-\frac{4外}{東})内=0$$

内，甲より外を求める式

$$-内\times甲-甲^2+\left(内+甲-\frac{4内}{東}\right)外=0$$

$$\frac{1}{東}=\frac{(外-甲)(内+甲)}{4内\times外}$$

補足　東に関する注記

どのようにして $東=\dfrac{4外\times内}{(外-甲)(内+甲)}$ が二距斜冪率になると考えたか

円に内接する正角形を考える．1 辺を a，二距斜を a_2，円の直径を R，矢を c，とする．

$$a:c=R:a \quad c=\frac{a^2}{R}$$

$$\frac{a_2}{2}:c=R-c:\frac{a_2}{2} \quad (\frac{a_2}{2})^2=c(R-c)=\frac{a^2}{R}(R-\frac{a^2}{R})$$

$$\left(\frac{a_2}{a}\right)^2=4\frac{R^2-a^2}{R^2}$$

円に直径の等しい円が内接および外接する場合を考える．$R=外-甲$，$R=内+甲$ より

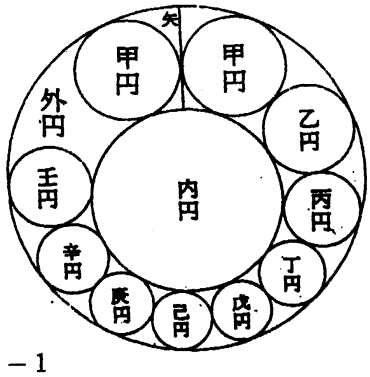
$$\left(\frac{a_2}{a}\right)^2=4\frac{(外-2甲)外}{(外-甲)^2}$$

$$\left(\frac{a_2}{a}\right)^2=4\frac{(内+2甲)内}{(内+甲)^2}$$

上記のような考察から東が二距斜冪率になることが考えられたのではないかと思われる．

3　甲円が2個並んでいる時，同様に各率を求める

廉術より



$\text{寄位} = (\text{外} - \text{矢})(\text{内} + \text{矢})$　$\text{増率} = \dfrac{2(\text{外} - \text{内})\,\text{甲}}{\text{位}}$　$\text{因法} = \text{東} - 2$

$\text{東} = \dfrac{4\,\text{内} \times \text{外}}{\text{位}}$　$\text{冬} = \text{増率} + \text{因法}$　$\text{江} = \text{冬} - 2$

$\text{増率} = \text{冬} - \text{東} + 2$　$\text{甲率} = 1$

$\text{乙率} = \text{甲率} \times \text{因法} + \text{増率} = \text{甲率} = \text{冬} - 1$

$\text{丙率} = \text{乙率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{甲率} = (\text{冬} - 1)(\text{東} - 2) * (\text{冬} - \text{東} + 2) - 1$

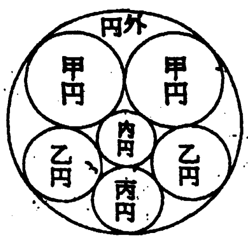
$= \text{東} \times \text{冬} - \text{冬} - 2\,\text{東} + 3 = \text{東} \times \text{江} - \text{江} + 1$

$\text{丁率} = \text{丙率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{乙率} = \text{東}^2 \times \text{江} - 3\,\text{東} \times \text{江} + 2\,\text{江} + 1$

$\text{戊率} = \text{丁率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{丙率} = \text{東}^3 \times \text{江} - 5\,\text{東}^2 \times \text{江} + 7\,\text{東} \times \text{江} - 3\,\text{江} + \text{冬} - 1$

$\text{己率} = \text{戊率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{丁率} = \text{東}^4 \times \text{江} - 7\,\text{東}^3 \times \text{江} + 16\,\text{東}^2 \times \text{江} - 13\,\text{東} \times \text{江} + 3\,\text{江} + 1$

個別の場合について



3円のとき，$\text{甲率} = \text{丙率}$　$\text{東} \times \text{江} - \text{江} + = 1$　$\text{東} \times \text{江} - \text{江} = 0$　$\text{東} - 1 = 0$

4円のとき，$\text{乙率} = \text{丙率}$　$\text{東} \times \text{江} - \text{江} + 1 = \text{冬} - 1$　$\text{東} \times \text{江} - \text{江} - \text{冬} + 2 = 0$

$\text{東} \times \text{江} - 2\,\text{江} = 0$　$\text{東} - 2 = 0$

5円のとき，$\text{乙率} = \text{丁率}$　$\text{東}^2 \times \text{江} - 3\,\text{東} \times \text{江} + 2\,\text{江} + 1 = \text{冬} - 1$

$\text{東}^2 \times \text{江} - 3\,\text{東} \times \text{江} + 2\,\text{江} - \text{冬} + 2 = 0$　$\text{東}^2 \times \text{江} - 3\,\text{東} \times \text{江} + \text{江} = 0$　$\text{東}^2 - 3\,\text{東} + 1 = 0$

6円のとき，$\text{丙率} = \text{丁率}$　$\text{東}^2 \times \text{江} - 3\,\text{東} \times \text{江} + 2\,\text{江} + 1 = \text{東} \times \text{江} - \text{江} + 1$

$\text{東}^2 \times \text{江} - 4\,\text{東} \times \text{江} + 3\,\text{江} = 0$　$\text{東}^2 - 4\,\text{東} + 3 = 0$

7円のとき，$\text{丙率} = \text{戊率}$

$\text{東}^3 \times \text{江} - 5\,\text{東}^2 \times \text{江} + 7\,\text{東} \times \text{江} - 3\,\text{江} + \text{冬} - 1 = \text{東} \times \text{江} - \text{江} + 1$

$\text{東}^3 \times \text{江} - 5\,\text{東}^2 \times \text{江} + 6\,\text{東} \times \text{江} - 2\,\text{江} + \text{冬} - 2 = 0$　$\text{東}^3 - 5\,\text{東}^2 + 6\,\text{東} - 1 = 0$

8円のとき，$\text{丁率} = \text{戊率}$

$\text{東}^3 \times \text{江} - 5\,\text{東}^2 \times \text{江} + 7\,\text{東} \times \text{江} - 3\,\text{江} + \text{冬} - 1 = \text{東}^2 \times \text{江} - 3\,\text{東} \times \text{江} + 2\,\text{江} + 1$

$\text{東}^3 \times \text{江} - 6\,\text{東}^2 \times \text{江} + 10\,\text{東} \times \text{江} - 5\,\text{江} + \text{冬} - 2 = 0$　$\text{東}^3 - 6\,\text{東}^2 + 10\,\text{東} - 4 = 0$

	4級	3級	2級	1級
3円			-1	1
4円			-2	1
5円		1	-3	1
6円		3	-4	1
7円	-1	6	-5	1
8円	-4	10	-6	1

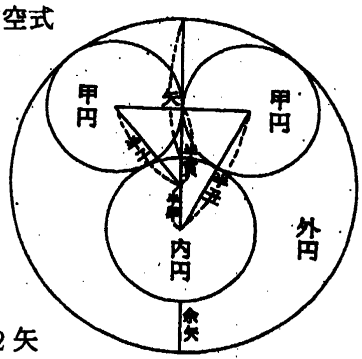
表 4: 東を求める式

東を得た後

$(外-矢)(内+矢)\,東=4\,内\times外$

$内\times外\times東+外\times矢\times東-矢\times内\times東-矢^2\times東-4\,内\times外=0$ 　前空式

$子=外-甲$ 　$丑=内+甲$ 　$外-内-矢=余矢$



次に矢を消去する

$子^2-甲^2=(外-甲)^2-甲^2=外^2-2\,外\times甲=寅^2$

$丑^2-甲^2=(内+甲)^2-甲^2=内^2+2\,内\times甲=(寅+卯)^2$

$卯=矢-余矢=外-内-2\,余矢=(外-内-余矢)-余矢=-外+内+2\,矢$

$(寅+卯)^2+寅^2-卯^2=2\,寅^2+2\,寅\times卯=内^2+2\,内\times甲+外^2-2\,外\times甲-(-外+内+2\,矢)^2$

$=2\,内\times甲-2\,外\times甲+2\,外\times内+4\,外\times矢-4\,内\times矢-4\,矢^2$

$-外\times甲+内\times甲+内\times外+2\,外\times矢-2\,内\times矢-2\,矢^2=(寅+卯)\,寅$

$-外\times甲\times東+内\times甲\times東+内\times外\times東+2\,外\times矢\times東-2\,内\times矢\times東-2\,矢^2\times東$

$=(寅+卯)\,寅\times東$

(上式) − (前空式)

$-外\times甲\times東+内\times甲\times東-内\times外\times東+8\,内\times外=(寅+卯)\,寅\times東$

$-(外-内)\,甲\times東-内\times外\times東+8\,内\times外=(寅+卯)\,寅\times東$

上式を２乗すると，$\{(寅+卯)\,寅\times東\}^2=(寅+卯)^2寅^2\times東^2$ 　より

$4\,内\times外\times甲^2\times東+(外-内)^2甲^2\times東^2-16(外-内)\,内\times外\times甲\times東$

$-16\,内^2\times外^2\times東+64\,内^2\times外^2=0$

$(外+内)^2甲^2\times東^2-16(外-内)\,内\times外\times甲\times東-16\,円^2\times外^2\times東+64\,内^2\times外^2=0$

外，内より甲を求める

$$64\,内^2\times外^2-16\,内^2\times外^2\times東+\{-16(外-内)\,内\times外\times東\}\,甲+(外+内)^2東^2\times甲^2=0$$

外，甲より内を求める

$$外^2\times甲^2\times東^2+\{2\,外\times甲^2\times東^2-16\,外^2\times甲\times東\}\,内$$

$$+\{\,甲^2\times東^2+16\,外\times甲\times東-16\,外^2\times東+64\,外^2\}\,内^2=0$$

東を求める式は円数を角数とした時の二距斜巾を求める式と同じ.

術文　術曰以四個為原数置周法冪四之為負一差置一差乗周法冪四之得数三除四除之為正二差置二差乗周法冪四之得数五除六除之，為負三差置三差乗周法冪四之得数七除八除之為正四差置四差乗周法冪四之得数九除一十除之為負五差余倣之次第如此求之即為求東表所求表出于此
原数正四個
一差負三十九個四七八四一七六〇四三五七四
二差正一百二十九個八七八七八八〇四五三
三差負一百七十〇個九一三六二一六一三
四差正一百二十〇個四八九二八二五六
五差負五十二個八五二四二八八
六差正一十五個八〇七〇四七
七差負三個四二八七八
求東術曰置七差以円数冪除之得数以減六差余以円数冪除之得数以減五差余以円数冪除之得数以減四差余以円数冪除之得数以減三差余以円数冪除之得数以減二差余以円数冪除之得数以減一差余以円数冪除之得数以減原数余得東
仮如円数三者依定式得東一個整
以表求之得一個〇〇〇〇〇〇〇〇〇六　九位合
乃円数一十者用五差則一十一位合矣　円数三十者用三差則一十位合矣
故円数愈多則用差数愈少而足故随題而当用差数而已

東を求める式

$$原数=4\qquad 一差=4(周法)^2\qquad 二差=\frac{(一差)4(周法)^2}{3\times4}=\frac{16(周法)^4}{3\times4}$$

$$三差=\frac{(二差)4(周法)^2}{5\times6}\qquad 四差=\frac{(三差)4(周法)^2}{7\times8}\qquad 五差=\frac{(四差)4(周法)^2}{9\times10}$$

$$東=原数-[一差-[二差-[三差-[四差-[五差-[六差-\frac{七差}{(円数)^2}]\frac{1}{(円数)^2}]$$

$$\frac{1}{(円数)^2}]\frac{1}{(円数)^2}]\frac{1}{(円数)^2}]\frac{1}{(円数)^2}]\frac{1}{(円数)^2}]$$

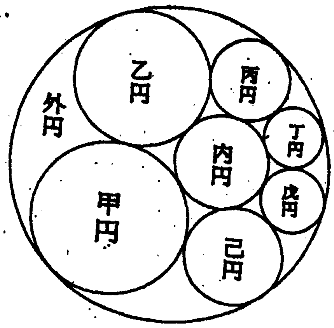
注

$$\text{東} = \left(\frac{a_2}{a}\right)^2 = (2\cos\theta)^2 = 2(1+\cos 2\theta) \qquad \theta = \frac{\pi}{n}$$

4　円内容累円術後編

図のように内，外円の間に累円を容れたものがある．

外，内，甲円の直径を与えて，乙円，丙円，丁円…の直径を求めよ．



術　円数を角数とする，正多角形の二距斜巾率を求め東とする．

$$\text{因法} = \text{東} - 2 \qquad \text{増率} = \sqrt{\frac{(\text{外}-\text{内})\,\text{東}\times\text{甲}}{\text{外}\times\text{内}}} \qquad \text{西} = \text{増率} + \text{東}$$

$$\text{西} - \frac{\{\sqrt{2\,\text{西} - (\frac{2\,\text{増率}\times\text{甲}}{\text{外}-\text{内}} + \text{東} + 4)}\} + 2}{2} = \text{乙率}$$

$$\text{丙率} = \text{乙率}\times\text{因法} + \text{増率} - 1$$

$$\text{丁率} = \text{丙率}\times\text{因法} + \text{増率} - \text{乙率}$$

$$\text{戊率} = \text{丁率}\times\text{因法} + \text{増率} - \text{丙率}$$

外，甲，乙を与えて内を求める　廉術変換より

$$\text{外}^2\times\text{甲}^2\times\text{乙}^2\times\text{東}^2 + \{2\,\text{外}\times\text{甲}^2\times\text{乙}^2\times\text{東}^2 - 8\,\text{外}^2(\text{甲}+\text{乙})\,\text{甲}\times\text{乙}\times\text{東}\}\,\text{内}$$

$$+\{\text{甲}^2\times\text{乙}^2\times\text{東}^2 + 8\,\text{外}\,(\text{甲}+\text{乙})\,\text{甲}\times\text{乙}\times\text{東} + 16\,\text{外}^2\times(\text{甲}+\text{乙})^2 - 16\,\text{外}^2\times\text{甲}\times\text{乙}\}\,\text{内}^2 = 0$$

$$-\text{外}\times\text{甲}\times\text{乙}\times\text{東} + \{-\text{甲}\times\text{乙}\times\text{東} + 4\,\text{外}\,(\text{甲}+\text{乙})\} = \text{寄位}$$

$$\text{寄位}^2 = \text{外}^2\times\text{甲}^2\times\text{乙}^2\times\text{東}^2 + \{2\,\text{甲}^2\times\text{乙}^2\times\text{東}^2\times\text{外} - 8\,\text{外}^2\times\text{甲}\times\text{乙}\times\text{東}\,(\text{甲}+\text{乙})\}\,\text{内}$$

$$+\{\text{甲}^2\times\text{乙}^2\times\text{東}^2 - 8\,\text{外}\,(\text{甲}+\text{乙})\,\text{甲}\times\text{乙}\times\text{東} + 16\,\text{外}^2(\text{甲}+\text{乙})\}\,\text{内}^2$$

$$\text{寄位}^2 - \text{基式} = \{-16\,\text{外}\,(\text{甲}+\text{乙})\,\text{甲}\times\text{乙}\times\text{東} + 16\,\text{外}^2\times\text{甲}\times\text{乙}\times\text{東}\}\,\text{内}^2$$

$$\sqrt{} = \sqrt{-16\,\text{外}\,(\text{甲}+\text{乙})\,\text{甲}\times\text{乙}\times\text{東} + 16\,\text{外}^2\times\text{甲}\times\text{乙}\times\text{東}}$$

$$-\text{外}\times\text{甲}\times\text{乙}\times\text{東} + \{-\text{甲}\times\text{乙}\times\text{東} + 4\,\text{外}\,(\text{甲}+\text{乙}) - \sqrt{}\}\,\text{内} = 0$$

$$-\text{外}\times\text{甲}\times\text{乙}\times\text{東} + \{-\text{甲}\times\text{乙}\times\text{東} + 4\,\text{外}\,(\text{甲}+\text{乙}) + \sqrt{}\}\,\text{内} = 0$$

解　廉術変換の天を求める式．天は甲，地は乙に換える．

$(外+内)\ 甲^2\times 乙^2\times 乾\ (外-内)\ 甲^2\times 乙-2\ 乾\ (外-内)\ 甲\times 乙^2+2\ 乾\ (外-内)\ 甲\times 乙\times 矢$

$-2\ 乾\times 坤\times 甲\times 乙+乾^2\times 甲^2+乾^2\times 乙^2=0$　基式

$乾=外\times 内+外\times 矢-内\times 矢-矢^2$　$坤=内\times 外+矢^2$

$東=\dfrac{4\ 内\times 外}{乾}=因法+2$　$増率=\dfrac{2(外-内)\ 甲}{乾}$　$東\times 乾=4\ 内\times 外$　とする

乙を求める式

$(外+内)^2 東^\times 甲^2\times 乙^2-8(外-内)\ 内\times 外\ (甲+乙)\ 甲\times 乙\times 東-16\ 内^2\times 外^2\times 甲\times 乙\times 東$

$+16\ 内^2\times 外^2(甲+乙)^2=0$

$16\ 内^2\times 外^2\times 甲^2+\{32\ 内^2\times 外^2\times 甲-16\ 内^2\times 外^2\times 甲\times 東-8(外-内)\ 内\times 外\times 甲\times 東\}\ 乙$

$+\{16\ 円^2\times 外^2+(外+内)^2\times 甲^2\times 東^2-8(外-内)\ 内\times 外\times 甲\times 東\}\ 乙^2=0\cdots$　原式

$-2\ 内\times 外\times 甲+\{-2\ 内\times 外+内\times 外\times 東+\dfrac{(外-内)\ 甲\times 東}{2}\}\ 乙=寄位$

$4(寄位)^2=16\ 内^2\times 外^2\times 甲^2$

$+\{32\ 内^2\times 外^2\times 甲-16\ 内^2\times 外^2\times 甲\times 東-8(外-内)\ 外\times 内\times 甲^2 東\}\ 乙$

$+\{16\ 内^2\times 外^2+44\ 内^2\times 外^2\times 東^2+(外-内)^2 甲^2\times 東^2-16\ 内^2\times 外^2\times 東$

$+4(外-内)\ 内\times 外\times 甲\times 東^2-8(外-内)\ 内\times 外\times 甲\times 東\}\ 乙^2$

$\{4(寄位)^2-(原式)\}\div 4=\{-4\ 内^2\times 外^2\times 東+内^2\times 外^2\times 東^2+(外-内)\ 内\times 外\times 甲\times 東^2$

$-内\times 外\times 甲^2\times 東^2\}\ 乙^2$

$(上式の乙の係数)\div(外^2\times 内^2)=-4\ 東+東^2+\dfrac{(外-内)\ 甲\times 東^2}{外\times 内}-\dfrac{甲^2\times 東^2}{外\times 内}$

$=-4\ 東+東^2+2\ 増率\times 東-\dfrac{甲^2\times 東^2}{外\times 内}$　$西=東+増率$

$=-4\ 東-東^2+2\ 東\times 西-\dfrac{2\ 増率\times 甲\times 東}{外-内}$

$\sqrt{}=\sqrt{-4\ 東-東^2+2\ 東\times 西-\dfrac{2\ 増率\times 甲\times 東}{外-内}}$　で表す

$-2\ 甲+\{2+東+増率-\sqrt{}\}\ 乙=0$

$乙率=\{東+増率-2-\sqrt{}\}\div 2$　$乙=\dfrac{甲}{乙率}$　$東=因法+2$

因法を求める

$$丙率 = 乙率 \times 因法 + 増率 - 甲率 = 増率 - 1 + 乙率 \times 因法$$

$$丁率 = 丙率 \times 因法 + 増率 - 乙率 = 増率 - 乙率 + (増率 - 1)\,因法 + 乙率 \times 因法^2$$

$$戊率 = 丁率 \times 因法 + 増率 - 丙率 = 1 + (増率 - 2\,乙率)\,因法 + (増率 - 1)\,因法^2 + 乙率 \times 因法^3$$

$$己率 = 戊率 \times 因法 + 増率 - 丁率 = 乙率 + (-増率 + 2)\,因法 + (増率 - 3\,乙率)\,因法^2$$
$$+(増率 - 1)\,因法^3 + 乙率 \times 因法^4$$

$$庚率 = 己率 \times 因法 + 増率 - 戊率 = 増率 - 1 + (-増率 + 3\,乙率)\,因法 + (-2\,増率 + 3)\,因法^2$$
$$+(増率 - 4\,乙率)\,因法^3 + (増率 - 1)\,因法^4 + 乙率 \times 因法^5$$

$$辛率 = 庚率 \times 因法 + 増率 - 己率 = 増率 - 乙率 + (2\,増率 - 3)\,因法 + (-増率 + 6\,乙率)\,因法^2$$
$$+(-3\,増率 + 4)\,因法^3 + (増率 - 5\,乙率)\,因法^4 + (増率 - 1)\,因法^5 + 乙率 \times 因法^6$$

$$壬率 = 辛率 \times 因法 + 増率 - 庚率 = 1 + (2\,増率 - 4\,乙率)\,因法 + (4\,増率 - 6)\,因法^2$$
$$+(-3\,増率 + 10\,乙率)\,因法^3 + (-3\,増率 + 5)\,因法^4 + (増率 - 6\,乙率)\,因法^5$$
$$+(増率 - 1)\,因法^6 + 乙率 \times 因法^7$$

$$癸率 = 壬率 \times 因法 + 増率 - 辛率 = 乙率 + (-2\,増率 + 4)\,因法 + (4\,増率 - 10\,乙率)\,因法^2$$
$$+(7\,増率 - 10)\,因法^3 + (-4\,増率 + 15\,乙率)\,因法^4 + (-4\,増率 + 6)\,因法^5$$
$$+(増率 - 7\,乙率)\,因法^6 + (増率 - 1)\,因法^7 + 乙率 \times 因法^8$$

三円

$$丁率 = 甲率 \qquad (増率 - 乙率) + (増率 - 1)\,因法 + 乙率 \times 因法^2 = 1$$

$$(増率 - 乙率 - 1) + (増率 - 1)\,因法 + 乙率 \times 因法 = 0 \;\cdots\; 前式$$

$$戊率 = 乙率 \qquad 1 + (増率 - 2\,乙率)\,因法 + (増率 - 1)\,因法^2 + 乙率 \times 因法^3 = 乙率$$

$$(1 - 乙率) + (増率 - 2\,乙率)\,因法 + (増率 - 1)\,因法^2 + 乙率 \times 因法 = 0 \;\cdots\; 後式$$

$$後式 - 前式 \times 因法$$

$$(1 - 乙率) + (-乙率 + 1)\,因法 = (-1 - 因法)(乙率 - 1) = 0$$

$$-1 - 因法 = 0$$

四円

戊率 $=$ 甲率　$1+($増率-2 乙率$)$ 因法 $+($増率$-1)$ 因法$^2+$ 乙率 $\times$ 因法$^3=1$

$($増率-2 乙率$)+($増率$-1)$ 因法 $+$ 乙率 $\times$ 因法$^2=0\ \cdots$　前式

己率 $=$ 乙率

乙率 $+(-$増率$+2)$ 因法 $+($増率-3 乙率$)$ 因法$^2+($増率$-1)$ 因法$^3+$ 乙率 $\times$ 因法 $=$ 乙率

$(-$増率$+2)+($増率-3 乙率$)$ 因法 $+($増率$-1)$ 因法$^2+$ 乙率 $\times$ 因法$^3=0\ \cdots$　後式

後式 $-$ 前式 $\times$ 因法

$(-$増率$+2)-$ 乙率 $\times$ 因法 $=0\ \cdots$　一式

前式 $+($一式$)\times$ 因法　　$($増率-2 乙率$)+$ 因法 $=0\ \cdots$　二式

$($一式$)+($二式$)$　　$(-2$ 乙率$+2)+(-$乙率$+1)$ 因法 $=($乙率$-1)(-2-$因法$)=0$

$-2-$ 因法 $=0$　この式は題意に背くから　因法 $=0$

五円

己率 $=$ 甲率

乙率 $+(-$増率$+2)$ 因法 $+($増率-3 乙率$)$ 因法$^2+($増率$-1)$ 因法$^3+$ 乙率 $\times$ 因法$^4=0$

乙率 $-1+(-$増率$+2)$ 因法 $+($増率-3 乙率$)$ 因法$^2+($増率$-1)$ 因法^3

　　$+$乙率 $\times$ 因法$^4=0\ \cdots$　前式

庚率 $=$ 乙率

増率 $-1+(-$増率$+3$ 乙率$)$ 因法 $+(-2$ 増率$+3)$ 因法$^2+($増率-4 乙率$)$ 因法^3

　　$+($増率$-1)$ 因法$^4+$ 乙率 $\times$ 因法$^5=$ 乙率

増率 $-$ 乙率 $-1+(-$増率$+3$ 乙率$)$ 因法 $+(-2$ 増率$+3)$ 因法$^2+($増率-4 乙率$)$ 因法^3

　　$+($増率$-1)$ 因法$^4+$ 乙率 $\times$ 因法$^5=0\ \cdots$　後式

後式 $-$ 前式 $\times$ 因法

$($増率$-$ 乙率$-1)+(-$増率$+2$ 乙率$)$ 因法 $+(-$増率$+!)$ 因法$^2-$ 乙率 $\times$ 因法$^3=0\ \cdots$　一式

$($一式$)\times$ 因法 $-($前式$)$

$($乙率$-1)+(-$乙率$+1)$ 因法 $+(-$乙率$+1)$ 因法$^2=0\ \cdots$　二式

$($乙率$-1)(1-$因法$-$因法$^2)=0$　　$1-$ 因法 $-$ 因法$^2=0$

六円

$$庚率 = 甲率$$

$$增率 - 1 + (-增率 + 3\,乙率)\,因法 + (-2\,增率 + 3)\,因法^2 + (增率 - 4\,乙率)\,因法^3$$

$$+(增率 - 1)\,因法^4 + 乙率 \times 因法^5 = 1$$

$$增率 - 2 + (-增率 + 3\,乙率)\,因法 + (-2\,增率 + 3)\,因法^2 + (增率 - 4\,乙率)\,因法^3$$

$$+(增率 - 1)\,因法^4 + 乙率 \times 因法^5 = 0 \cdots \quad 前式$$

$$辛率 = 乙率$$

$$增率 - 乙率 + (2\,增率 - 3)\,因法 + (-2\,增率 + 6\,乙率)\,因法^2 + (-3\,增率 + 4)\,因法^3$$

$$+(增率 - 5\,乙率)\,因法^4 + (增率 - 1)\,因法^5 + 乙率 \times 因法^6 = 乙率$$

$$增率 - 2\,乙率 + (2\,增率 - 3)\,因法 + (-2\,增率 + 6\,乙率)\,因法^2 + (-3\,增率 + 4)\,因法^3$$

$$+(增率 - 5\,乙率)\,因法^4 + (增率 - 1)\,因法^5 + 乙率 \times 因法^6 = 0 \cdots \quad 後式$$

$$後式 - 前式 \times 因法$$

$$增率 - 2\,乙率 + (增率 - 1)\,因法 + (-增率 + 3\,乙率)\,因法^2 + (-增率 + 1)\,因法^3$$

$$-乙率 \times 因法^4 = 0 \cdots \quad 一式$$

$$(一式) \times 因法 + 前式$$

$$增率 - +2\,乙率 \times 因法 + (-增率 + 2)\,因法^2 - 乙率 \times 因法^3 = 0 \cdots \quad 二式$$

$$(一式) - (二式) \times 因法$$

$$增率 - 2\,乙率 + 因法 + (-增率 + 2\,乙率)\,因法^2 - 因法^3 = 0 \cdots \quad 三式$$

$$(三式) - (二式)$$

$$-2\,乙率 + 2 + (-乙率 + 1)\,因法 + (2\,乙率 - 2)\,因法^2 + (乙率 - 1)\,因法^3 = 0$$

$$(乙率 - 1)(-2 - 因法 + 2\,因法^2 + 因法^3) = 0$$

$$-2 - 因法 + 2\,因法^2 + 因法^3 = 0$$

$$(2 + 因法)(1 - 因法)(-1 + 因法) = 0 \qquad -1 + 因法 = 0$$

七円

辛率 = 甲率

(増率 − 乙率) + (2 増率 − 3) 因法 + (−2 増率 + 6 乙率) 因法^2 + (−3 増率 + 4) 因法^3

+(増率 − 5 乙率) 因法^4 + (増率 − 1) 因法^5 + 乙率 × 因法^6 = 1

(増率 − 乙率 − 1) + (2 増率 − 3) 因法 + (−2 増率 + 6 乙率) 因法^2 + (−3 増率 + 4) 因法^3

+(増率 − 5 乙率) 因法^4 + (増率 − 1) 因法^5 + 乙率 × 因法^6 = 0 ⋯ 前式

壬率 = 乙率

1 + (2 増率 − 4 乙率) 因法 + (4 増率 − 6) 因法^2 + (−3 増率 + 10 乙率) 因法^3 + (−4 増率 + 5) 因法^4

+(増率 − 6 乙率) 因法^5 + (増率 − 1) 因法^6 + 乙率 × 因法^7 = 乙率

−乙率 + 1 + (2 増率 − 4 乙率) 因法 + (4 増率 − 6) 因法^2 + (−3 増率 + 10 乙率) 因法^3

+(−4 増率 + 5) 因法^4 + (増率 − 6 乙率) 因法^5 + (増率 − 1) 因法^6 + 乙率 × 因法^7 = 0 ⋯ 後式

後式 − 前式 × 因法

−乙率 + 1 + (増率 − 3 乙率 + 1) 因法 + (2 増率 − 3) 因法^2 + (−増率 + 4 乙率) 因法^3

+(−4 増率 + 5) 因法^4 + 乙率 × 因法^5 = 0 ⋯ 一式

前式 + (一式) × 因法

(増率 − 乙率 − 1) + (2 増率 − 乙率 − 2) 因法 + (−増率 + 3 乙率 + 1) 因法^2 + (−増率 + 1) 因法^3

−乙率 × 因法^4 = 0 ⋯ 二式

(一式) − (二式) × 因法

−乙率 + 1 + (−2 乙率 + 2) 因法 + (乙率 − 1) 因法^2 + (乙率 − 1) 因法^3 = 0

(乙率 − 1)(−1 − 2 因法 + 因法^2 + 因法^3) = 0　　− 1 − 2 因法 + 因法^2 + 因法^3 = 0

八円

壬率 = 甲率

2 増率 − 4 乙率 + (4 増率 − 6) 因法 + (−3 増率 + 10 乙率) 因法^2 + (−4 増率 + 5) 因法^3

+(増率 − 6 乙率) 因法^4 + (増率 − 1) 因法^5 + 乙率 × 因法^6 = 0 ⋯ 前式

癸率 = 乙率

-2 増率 $+ 4) + (4$ 増率 $- 10$ 乙率) 因法 $+ (7$ 増率 $- 10$ 乙率) 因法$^2 + (-4$ 増率 $+ 15$ 乙率) 因法^3

$+(-5$ 増率 $+ 6)$ 因法$^4 + ($増率 $- 7$ 乙率) 因法$^5 + ($増率 $- 1)$ 因法$^6 +$ 乙率 $\times$ 因法$^7 = 0 \cdots$ 後式

後式 $-$ 前式 $\times$ 因法

$(-2$ 増率 $+ 4) + (2$ 増率 $- 6$ 乙率) 因法 $+ (3$ 増率 $- 4)$ 因法$^2 + (-$増率 $+ 5$ 乙率) 因法^3

$+(-$増率 $+ 1)$ 因法$^4 +$ 乙率 $\times$ 因法$^5 = 0 \cdots$ 一式

前式 $+$ (一式) $\times$ 因法

$(2$ 増率 $- 4$ 乙率) $+ (2$ 増率 $- 2)$ 因法 $+ (-$増率 $+ 4$ 乙率) 因法^2

$+(-$増率 $+ 1)$ 因法$^3 -$ 乙率 $\times$ 因法$^4 = 0 \cdots$ 二式

(一式) $-$ (二式) $\times$ 因法

$(-2$ 増率 $+ 4) - 2$ 乙率 $\times$ 因法 $+ ($増率 $- 2)$ 因法$^2 +$ 乙率 $\times$ 因法$^3 = 0 \cdots$ 三式

(二式) $+$ (三式) $\times$ 因法

$(2$ 増率 $- 4$ 乙率) $+ 2$ 因法 $+ (-$増率 $+ 2$ 乙率) 因法$^2 -$ 因法$^3 = 0 \cdots$ 四式

(三式) $+$ (四式)

-4 乙率 $+ 4 + (-2$ 乙率 $+ 2)$ 因法 $+ (2$ 乙率 $- 2)$ 因法$^2 + ($乙率 $- 1)$ 因法$^3 = 0$

(乙率 $- 1)(-4 - 2$ 因法 $+ 2$ 因法$^2 +$ 因法$^3) = 0 \quad -4 - 2$ 因法 $+ 2$ 因法$^2 +$ 因法$^3 = 0$

$(2 +$ 因法$)(-2 +$ 因法$^2) = 0 \quad -2 +$ 因法$^2 = 0$

東を得る式

東 $=$ 因法 $+ 2$

3円　$1 -$ 東 $= 0$

4円　$-2 +$ 東 $= 0$

5円　$-1 + 3$ 東 $-$ 東$^2 = 0$

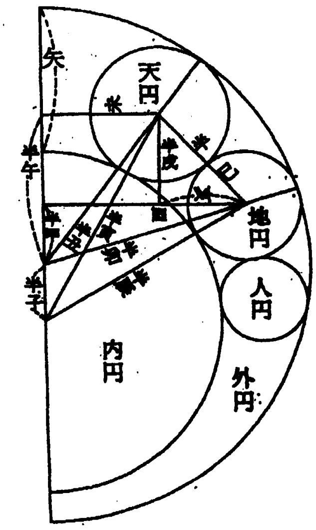
6円　$-3 +$ 東 $= 0$

7円　$-1 + 6$ 東 $- 5$ 東$^2 +$ 東$^3 = 0$

8円　$2 - 4$ 東 $+$ 東$^2 = 0$

5　補足廉術変換より

外円，内円，地円の直径，および矢の長さが与えられたとき，天円，人円の直径を求める．



$子 = -外 + 内 + 2矢 = -(外 - 内) + 2矢 = -(外 - 矢) + (内 + 矢)$

$丑 = 外 - 天 \quad 寅 = 内 + 天 \quad 卯 = 外 - 地 \quad 辰 = 内 + 地 \quad 巳 = 天 + 地$

$寅^2 - 子^2 - 丑^2 = 2子 \times 午$

$= -2外^2 - 4内 \times 矢 - 4矢^2 + 4外 \times 矢 + 2外 \times 内 + 2内 \times 天 + 2外 \times 天$

$東 = 子 \times 午 = -外^2 - 2内 \times 矢 - 2矢^2 + 2外 \times 矢 + 外 \times 内 + 内 \times 天 + 外 \times 天$

$子^2 \times 丑^2 - 東^2 = 4子^2 \times 未^2$

$乾 = 外 \times 内 + 外 \times 矢 - 内 \times 矢 - 矢^2$

$子^2 \times 未^2 = -乾(外 - 内)矢 + 乾 \times 矢^2 + 乾(外 - 内)天 - 乾 \times 天^2 = 冬$

冬の中の天を地に換える，丑を卯に，寅を辰に，午を申に換える．

$子^2 \times 酉^2 = -乾(外 - 内)矢 + 乾 \times 矢^2 + 乾(外 - 内)地 - 乾 \times 地^2 = 江$

$酉 = 未 + 亥$，東の中の天を地に換える．

$子 \times 申 = -外^2 - 2内 \times 矢 - 2矢^2 + 2外 \times 矢 + 外 \times 内 + 内 \times 地 + 外 \times 地$

$東 - 子 \times 申 = 子 \times 戊 = 内 \times 天 + 外 \times 天 - 内 \times 地 - 外 \times 地$

$子^2 \times 巳^2 - 子^2 \times 戊^2 = 4子^2 \times 亥^2$

$子^2 \times 亥^2 = 支 = -乾 \times 天^2 - 2乾 \times 天 \times 地 - 乾 \times 地^2 + (外 + 内)^2 天 \times 地$

$支 + 江 - 冬 = 子^2 \times 2亥 \times 酉$

$= -2天 \times 地 \times 乾 - 2地^2 \times 乾 - (外 - 内)乾 \times 天 + (外 - 内)乾 \times 地 + (外 + 内)^2 天 \times 地$

$4江 \times 支 = 4子^4 \times 亥^2 \times 酉^2$

$坤 = 外 \times 内 + 矢^2$　とおき子を約す．

$乾^2 \times 地^2 + \{-2乾(外 - 内)地^2 - 2乾 \times 坤 \times 地 + 2乾(外 - 内)矢 \times 地\}天$

$+\{(外 + 内)^2 地^2 + 乾^2 - 2乾(外 - 内)地\}天^2 = 0$

天を地に，地を人に換える．天を求める式と人を求める式は交商式．

$乾^2 \times 地^2 + \{-2乾(外 - 内)地^2 - 2乾 \times 坤 \times 地 + 2乾(外 - 内)矢 \times 地\}人$

$+\{(外+内)^2地^2+乾^2-2乾(外-内)地\}人^2=0$

$[-乾\times地+\{(外-内)地+坤-(外-内)矢\}天]^2$

$-\{4内\times外(矢+地)(矢-地)-4内\times外(外-内)(矢-地)\}=0$

$右位=\sqrt{4内\times外(矢+地)(矢-地)-4内\times外(外-内)(矢-地)}$

$-乾\times地+\{(外-内)地+坤-(外-内)矢-(右位)\}天=0$

$-乾\times地+\{(外-内)地+坤-(外-内)矢+(右位)\}人=0$

$-乾\times地\times人+\{-乾\times地+2(外-内)地\times人+2坤\times人-2(外-内)矢\times人\}天=0$

地を甲に，天を乙に換える.

$乾=外\times内+外\times矢-内\times矢-矢^2=(外-矢)(矢+内)=寄位$

$坤=内\times外+矢^2 \quad 内\times外-矢(外-内)+矢^2=内\times外-寄位$

$左式=-寄位\times甲+\{(外-内)甲+2内\times外-寄位\}乙 \quad 再位$

$右位=\sqrt{4(甲+矢)(矢-甲)内\times外-4(外-内)(矢-甲)内\times外}$

$-寄位\times甲+(再位-右位)乙=0$

丙を求める式

$-寄位\times甲\times乙+\{-寄位\times乙+2(外-内)甲\times乙+2坤\times甲-2(外-内)矢\times甲\}丙=0$

$-甲+\{-1+\frac{2(外-内)甲}{寄位}+\frac{4内\times外\times甲}{寄位\times乙}-\frac{2甲}{乙}\}丙=0$

$丙率=\frac{甲}{丙} \quad 甲率=1 \quad 乙率=\frac{甲}{乙} \quad 因法=\frac{4内\times外}{寄位}-2 \quad 増率=\frac{2(外-内)甲}{寄位}$

$-甲+\{-甲率+増率+乙率\times因法\}丙=0$

$丙率=乙率\times因法+増率-甲率 \quad 丙=\frac{甲}{丙率}$

参考文献

[1] 平山諦・松岡元久編『安島直円全集』富士短期大学出版部　昭和 41 年

[2] 加藤平左エ門著『和算ノ研究　雑論 II』日本学術振興会　昭和 29 年

[3] 平山諦・内藤淳編集『松永良弼』松永良弼刊行会　東京法令　昭和 62 年

[4] 米光丁・藤井康生著『拾璣算法』平成 11 年